

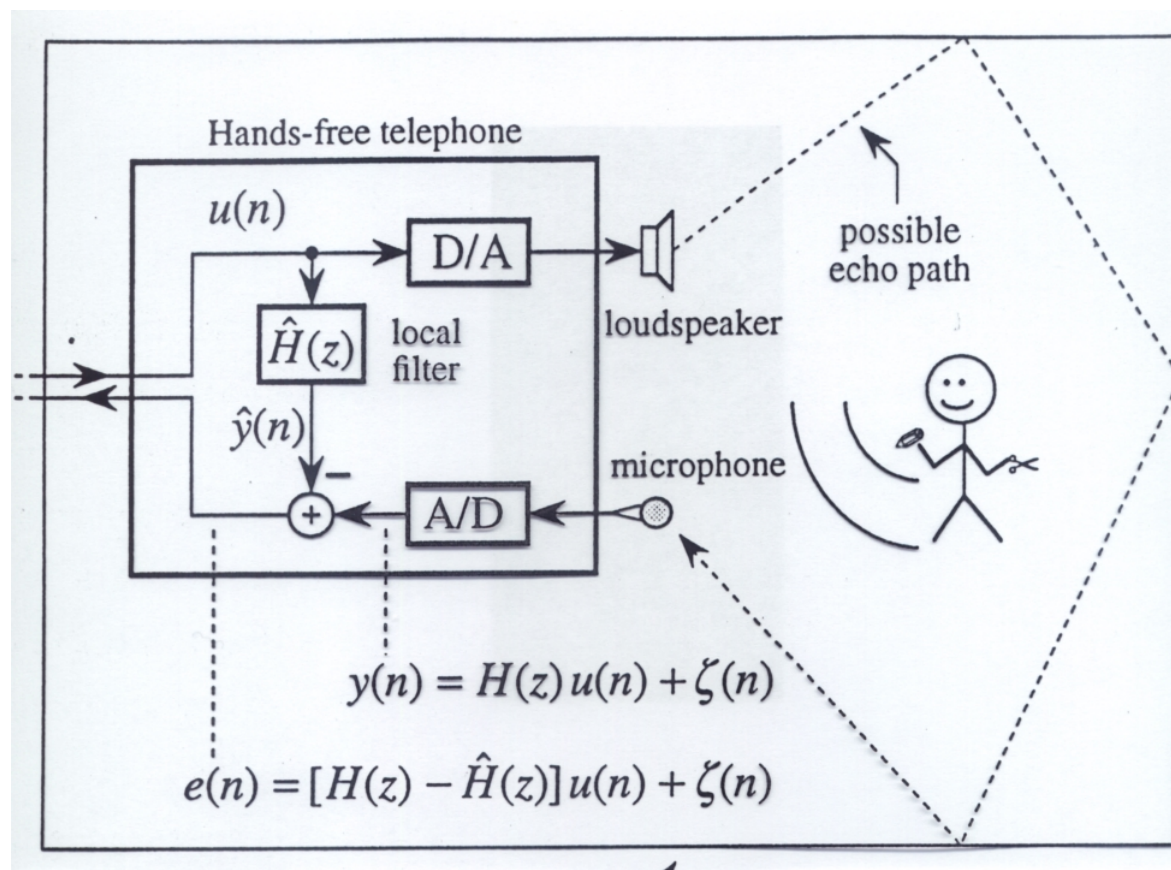
Filtry adaptacyjne

Spis treści

1. Przykłady
2. Filtr Wienera
3. Algorytm filtracji adaptacyjnej
4. Algorytm rekursywnej adaptacji filtrów typu FIR



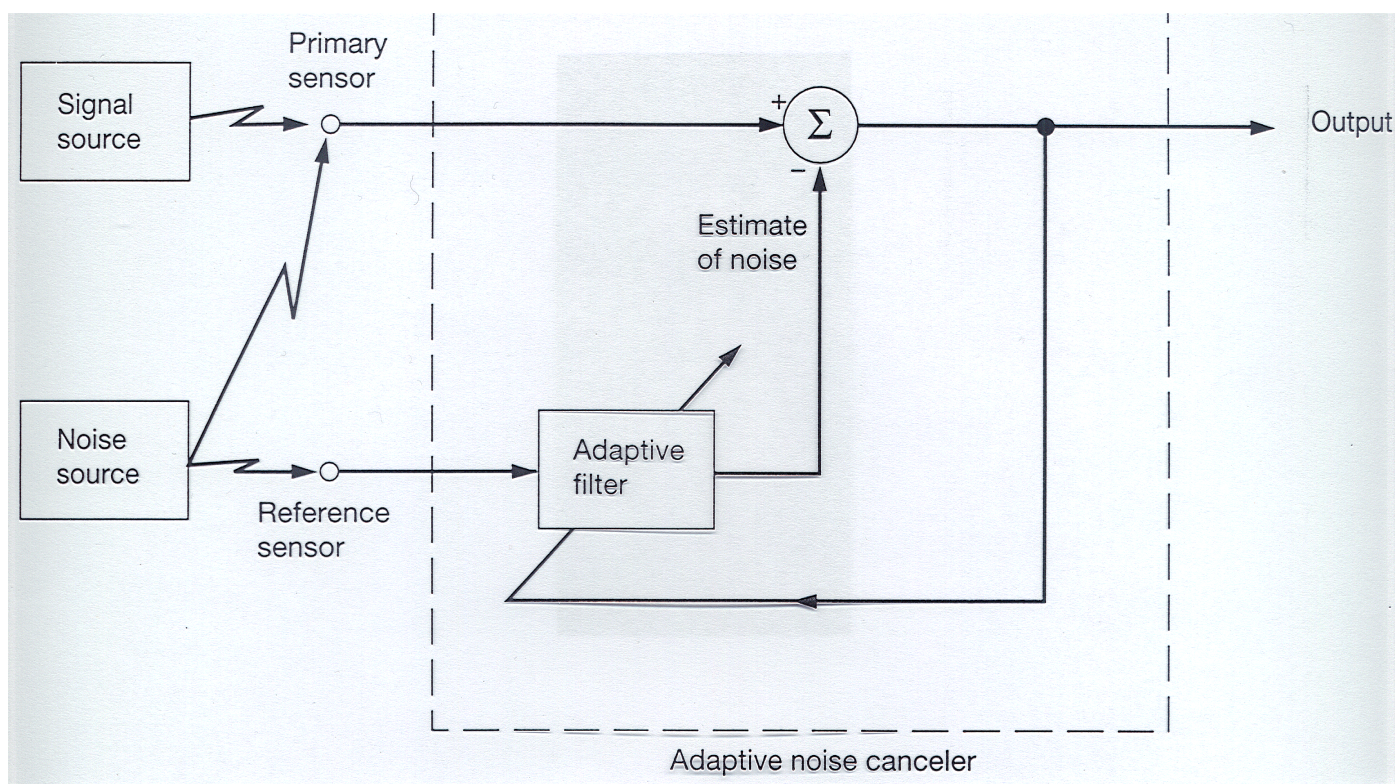
Telefon głośno mówiący



P.A. Regalia: Adaptive IIR Filtering in Signal Processing



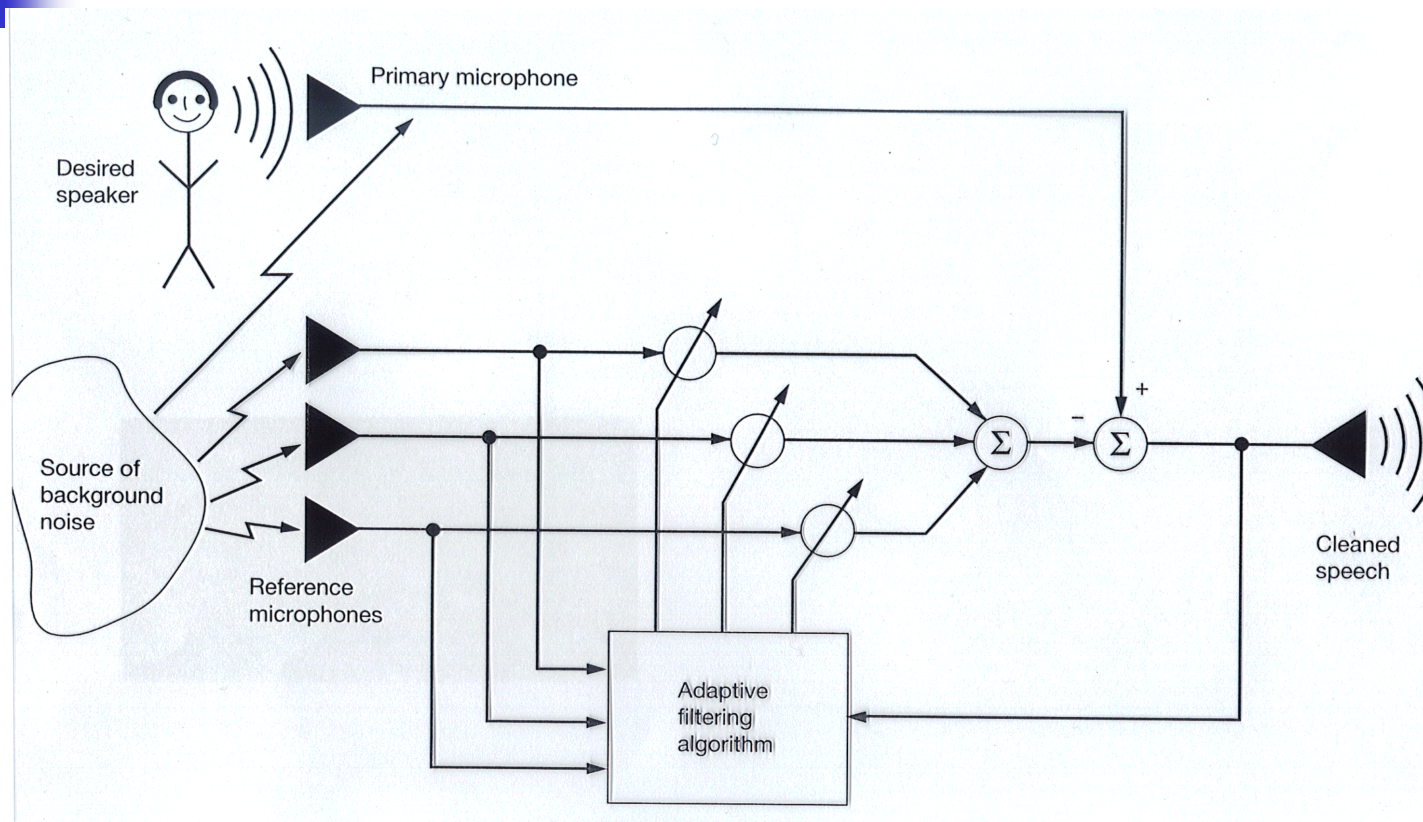
Tłumienie hałasu



S.Haykin: Adaptive Filter Theory



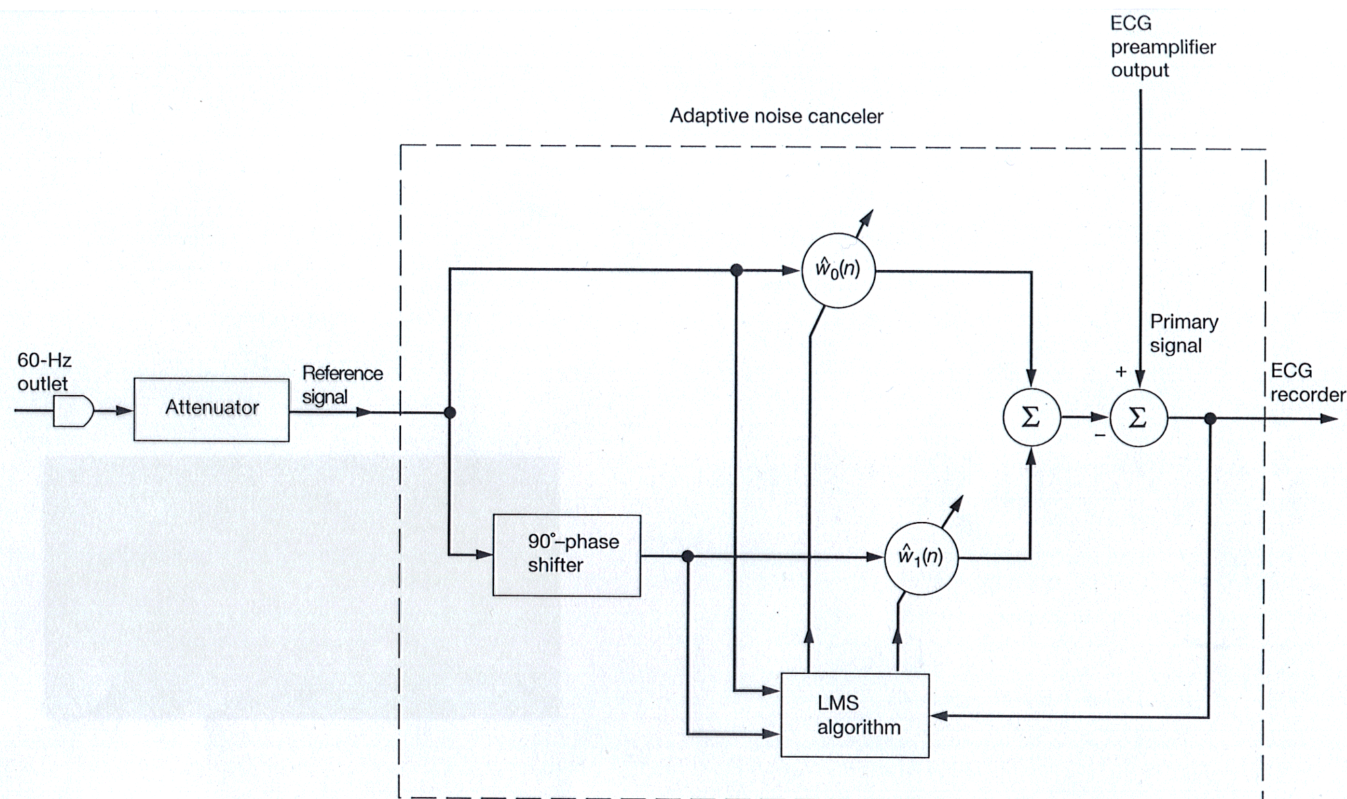
Wielokanałowe tłumienie hałasu



S.Haykin: Adaptive Filter Theory



Elektrokardiografia



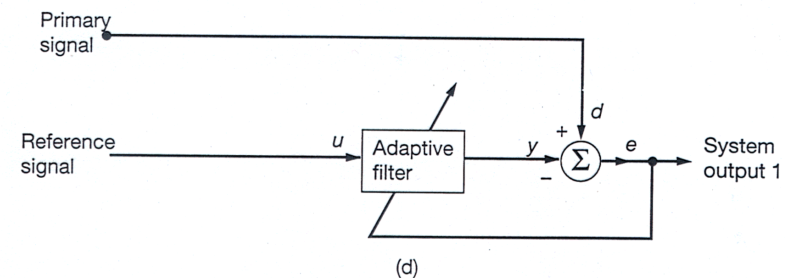
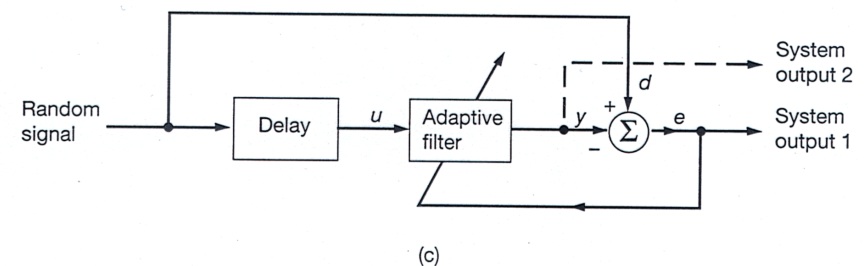
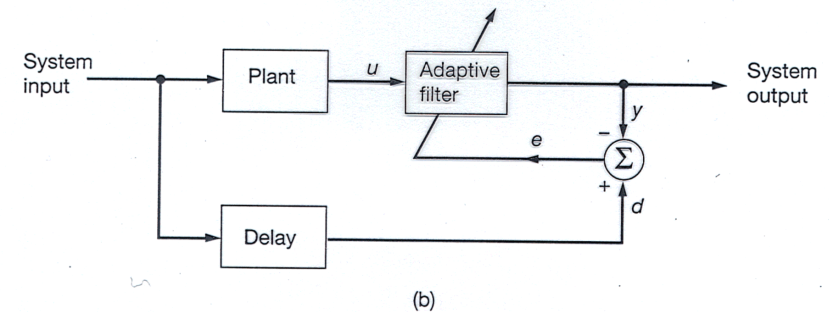
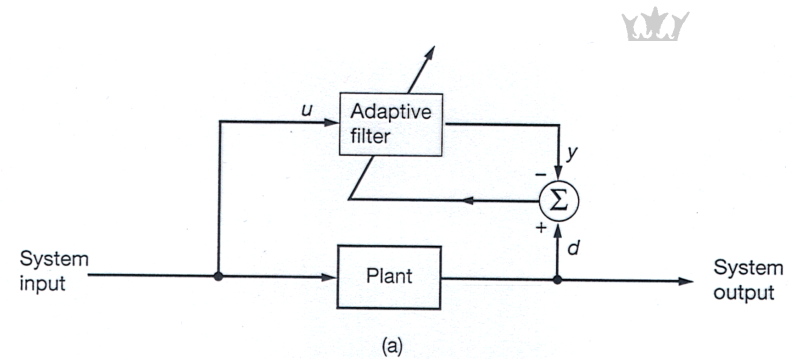
S.Haykin: Adaptive Filter Theory

Zastosowania

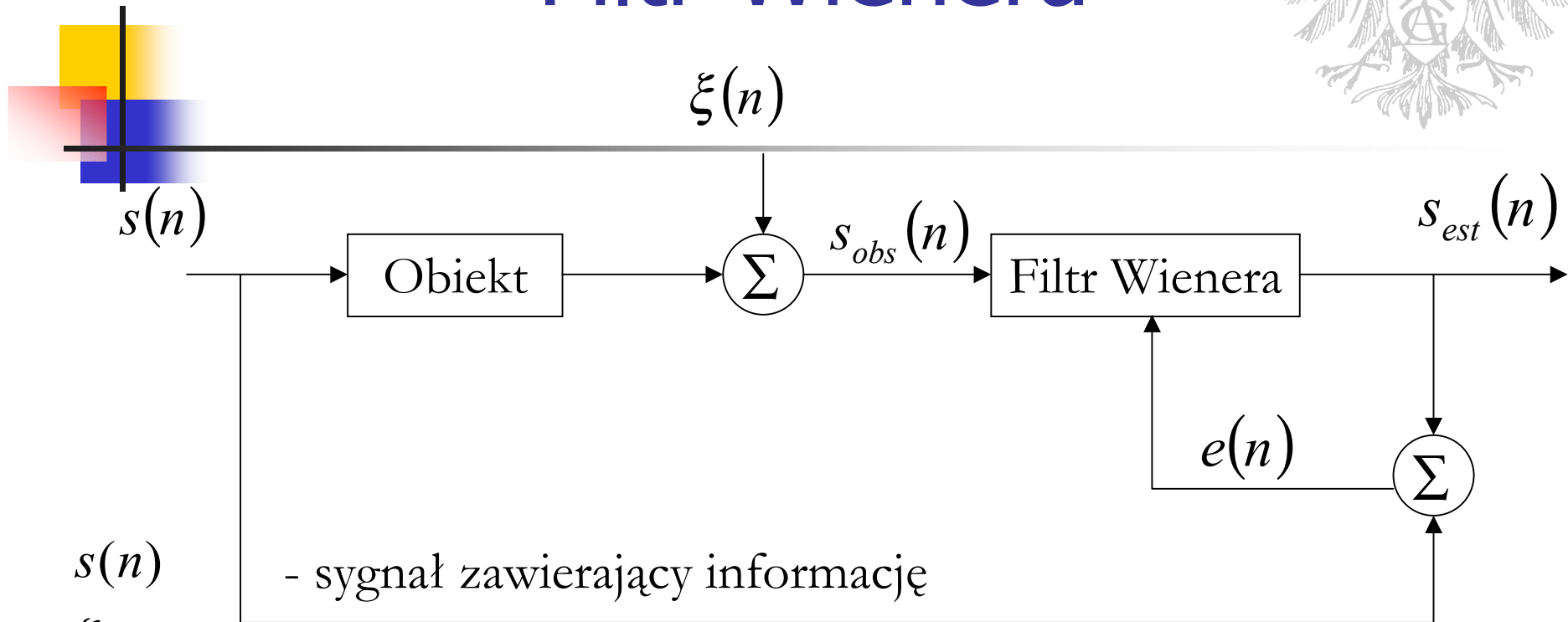
Cztery podstawowe klasy zastosowań filtracji adaptacyjnej:

- a) identyfikacja,
- b) odwrotne modelowanie,
- c) predykcja,
- d) likwidacja zakłóceń.

S.Haykin: Adaptive Filter Theory



Filtr Wienera



$s(n)$ - sygnał zawierający informację

$\xi(n)$ - zakłócenie

$s_{obs}(n)$ - sygnał obserwowany

$s_{est}(n)$ - sygnał estymujący

$e(n)$ - błąd



Estymacja sygnału

$$e(n) = s(n) - s_{est}(n)$$

$$s_{est}(n) = \sum_{m=0}^N h_m s_{obs}(n-m)$$

$$s_{est}(n) = h^T \underline{s}_{obs}(n)$$

gdzie $\underline{s}_{obs}(n) = [s_{obs}(n), s_{obs}(n-1), \dots, s_{obs}(n-N)]^T \in \mathfrak{R}^{N+1}$



Kryterium

$$Q = E\{e^2(n)\} \stackrel{df}{=} \frac{1}{M - N + 1} \sum_{n=N}^M e^2(n)$$

$$\begin{aligned} Q &= E\left\{\left(s(n) - h^T \underline{s}_{obs}(n)\right)^2\right\} = E\left\{s^2(n) - 2h^T \underline{s}_{obs}(n) s(n) + h^T \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) h\right\} \\ &= E\left\{s^2(n)\right\} - 2h^T \Phi + h^T \Phi_{obs} h \end{aligned}$$

$$\text{dla} \quad \begin{cases} \Phi = E\{\underline{s}_{obs}(n) s(n)\} \in \Re^{N+1} \\ \Phi_{obs} = E\{\underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n)\} \end{cases}$$



Wektor korelacji i macierz autokorelacji

$$\Phi = \frac{1}{M - N + 1} \begin{bmatrix} \sum_{n=N}^M s_{obs}(n)s(n) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-1)s(n) & \cdots & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-N)s(n) \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_{obs} = \frac{1}{M - N + 1} \begin{bmatrix} \sum_{n=N}^M s_{obs}^2(n) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n)s_{obs}(n-1) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n)s_{obs}(n-2) & \cdots & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n)s_{obs}(n-N) \\ \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-1)s_{obs}(n) & \sum_{n=N}^M s_{obs}^2(n-1) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-1)s_{obs}(n-2) & \cdots & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-1)s_{obs}(n-N) \\ \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-2)s_{obs}(n) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-2)s_{obs}(n-1) & \sum_{n=N}^M s_{obs}^2(n-2) & \cdots & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-2)s_{obs}(n-N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-N)s_{obs}(n) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-N)s_{obs}(n-1) & \sum_{n=N}^M s_{obs}(n-N)s_{obs}(n-2) & \cdots & \sum_{n=N}^M s_{obs}^2(n-N) \end{bmatrix}$$



Optymalizacja

$$\frac{\partial Q}{\partial h_j} = E \left\{ \frac{\partial}{\partial h_j} e^2(n) \right\} = E \left\{ 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial h_j} \right\}$$

$$e(n) = s(n) - h^T \underline{s}_{obs}(n) = s(n) - \sum_{m=0}^N h_m s_{obs}(n-m)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial h_j} = E \left\{ 2e(n) \frac{\partial}{\partial h_j} \left(s(n) - \sum_{m=0}^N h_m s_{obs}(n-m) \right) \right\} = E \{ -2e(n) s_{obs}(n-j) \}$$

$$\text{dla } j = 0, 1, \dots, N$$



Rozwiązanie optymalne

$$\Rightarrow \nabla = \begin{bmatrix} \partial Q / \partial h_0 \\ \dots \\ \partial Q / \partial h_N \end{bmatrix} = -2E \left\{ \begin{bmatrix} s_{obs}(n) \\ s_{obs}(n-1) \\ \dots \\ s_{obs}(n-N) \end{bmatrix} e(n) \right\}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= -2E \{ \underline{s}_{obs}(n) (s(n) - h^T \underline{s}_{obs}(n)) \} \\ &= -2E \{ \underline{s}_{obs}(n) s(n) \} + 2E \{ \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \} h \end{aligned}$$

$$\nabla = -2\Phi + 2\Phi_{obs} h = 0$$

$$\Phi_{obs} h_{opt} = \Phi$$



$$Q = E \{ s^2(n) \} - 2h^T \Phi + h^T \Phi_{obs} h$$



$$Q = E \{ e^2(n) \}$$

$$Q_{opt} = E \{ s^2(n) \} - h_{opt}^T \Phi$$



Algorytm filtracji adaptacyjnej

$$s_{est}(n) = \sum_{m=0}^N h_m(n-1) s_{obs}(n-m) = h^T(n-1) \underline{s}_{obs}(n)$$

$$\Phi_{obs}(n) h(n) = \Phi(n)$$



$$\Phi_{obs} h_{opt} = \Phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{obs}(n) = \sum_{m=N}^n \underline{s}_{obs}(m) \underline{s}_{obs}^T(m) \\ \Phi(n) = \sum_{m=N}^n \underline{s}_{obs}(m) s(m) \end{array} \right.$$

Algorytm filtracji adaptacyjnej



$$\begin{cases} \Phi_{obs}(n) = \Phi_{obs}(n-1) + \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \\ \Phi(n) = \Phi(n-1) + \underline{s}_{obs}(n) s(n) \end{cases}$$

$$\Phi(n) = \Phi_{obs}(n) h(n)$$

$$\Phi_{obs}(n) h(n) = \Phi_{obs}(n-1) h(n-1) + \underline{s}_{obs}(n) s(n)$$

$$\Phi_{obs}(n) h(n) = \left(\Phi_{obs}(n) - \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \right) h(n-1) + \underline{s}_{obs}(n) s(n)$$

$$\Phi_{obs}(n) h(n) = \Phi_{obs}(n) h(n-1) + \underline{s}_{obs}(n) \left(s(n) - h^T(n-1) \underline{s}_{obs}(n) \right)$$

$$h(n) = h(n-1) + \Phi_{obs}^{-1}(n) \underline{s}_{obs}(n) e(n)$$

$$e(n) = s(n) - s_{est}(n)$$

Algorytm rekurencyjnego wyznaczania macierzy odwrotnej



Sherman - Mossison

$$\Phi_{obs}^{-1}(n) = \Phi_{obs}^{-1}(n-1) - \frac{\Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1)}{1 + \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n)}$$

$$Q = \sum_{n=N}^K (s(n) - s_{est}(n))^2 \alpha^{K-n}$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\Phi_{obs}^{-1}(n) = \frac{1}{\alpha} \left[\Phi_{obs}^{-1}(n-1) - \frac{\Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1)}{\alpha + \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n)} \right]$$

Algorytm rekursywnej adaptacji filtrów FIR



1. Przyjąć:
 - a) rząd filtru N i oznaczyć chwilę początkową $n = N$,
 - b) macierz $\Phi_{obs}(n) = \frac{1}{\delta} I_{N+1}$ gdzie δ jest małą liczbą dodatnią, a I_{N+1} jest macierzą jednostkową o wymiarach $(N+1) \times (N+1)$,
 - c) współczynniki filtru $h(n-1) = 0 \in \mathbb{R}^{N+1}$,
 - d) numer chwili końcowej K .

Algorytm rekursywnej adaptacji filtrów FIR



2. Wprowadzić wartości obserwowanego sygnału $s_{obs}(m)$ dla $m = 0, 1, \dots, n$ i umieścić w wektorze $\underline{s}_{obs}(n)$ oraz za $s(n)$ wstawić N -tą wartość sygnału wejściowego s .

3. Obliczyć

$$s_{est}(n) = h^T(n-1) \underline{s}_{obs}(n)$$

$$e(n) = s(n) - s_{est}(n)$$

oraz

$$\Phi_{obs}^{-1}(n) = \Phi_{obs}^{-1}(n-1) - \frac{\Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n) \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1)}{1 + \underline{s}_{obs}^T(n) \Phi_{obs}^{-1}(n-1) \underline{s}_{obs}(n)}$$

i na końcu poprawić filtr $h(n) = h(n-1) + \Phi_{obs}^{-1}(n) \underline{s}_{obs}(n) e(n)$.

Algorytm rekursywnej adaptacji filtrów FIR



4. Jeżeli $n = K$ zakończyć obliczenia.
5. Wprowadzić kolejne wartości sygnałów $s_{obs}(n+1)$, $s(n+1)$ a następnie zwiększyć wskaźnik n o jeden i przejść do punktu 3.